УДК 004.22

БАНЯ Е.Н.,
СЕЛИВАНОВ В.Л.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ РАЗНЫХ КЛАССОВ

Класс систем счисления целесообразно определять порядком вычисления символов. В системах счисления класса А, к которым относятся позиционные системы, порядок вычисления символов зависим и последовательный. В системах класса В, к которым относятся системы счисления остаточных классов, порядок вычисления символов параллелен и независим. Дана классификация систем счисления.

The class of scales of notation should be defined by the order of symbol’s calculation. In A class scales of notation, to which positional scales of notation referred to, the order of symbol’s calculation is dependent and successive. In scales of notation of B class, to which scales of notation of vestigial classes referred to, the order of symbol’s calculation is parallel and dependent. The classification of scale of notation is given.

История развития вычислительной техники непрерывно связана с разработокой и внедрением все более новых принципов представления и кодирования числовой информации. Количество систем счисления, которые используются в цифровой вычислительной технике, непрерывно растет. На ряду с двоичной и двоично-десятичными системами счисления известны примеры применениия троичной, двоично-пятеричной, систем счисления, систем счисления с отрицательным, комплексным, иррациональными основаниями, системы счисления остаточных классов. В настоящее время нет единой классификации систем счисления, четкого разделения на классы. В научно-технической литературе встречаются противоречивые и неоднозначные трактовки базовых характеристик и параметров систем счисления, что значительно усложняет разработку теории проектирования преобразователей форм представления информации. Цель данной работы – устранение противоречий, имеющихся неточностей в определениях и терминологии, разработке классификация систем счисления.

Построение произвольной системы счисления следует начать с выбора базовых параметров, характеризующих данную систему, и разработки определенных правил, позволяющих представить любую величину в этой системе.

Под системой счисления будем понимать такой способ изображения множества чисел с помощью ограниченного набора символов, составляющих ее алфавит, при котором эти символы (элементы алфавита) располагаются в установленном порядке, занимая определенные места (позиции).

В качестве базовых параметров произвольной систем счисления выбирают:

1. Максимальную длину последовательности (общее количество позиций (разрядов)) $-(n+1)$
2. Номер позиции (разряда) – $i\ (i=\overline{0,n})$
3. Допустимое для данной позиции количество символов l_i
4. Возможные значения символа в i – позиции $a_i^j[j=\overline{1,l_i}]$
5. Набор символов в i-позиции – $A_i \in [a_i^1, a_i^2, ..., a_i^{l_i}]$
6. Полный набор символов, применяемых в системе счисления составляет алфавит систем счисления – А.
7. Значение (мера) i-й позиции (количественное значение каждой единицы i – позиции или количественный эквивалент i – позиции) - Q_i
8. Базис системы счисления (набор выбранных мер) - $B \in [Q_0, Q_1, ..., Q_n, Q_{n+1}]$
9. Диапазон представления чисел – Q
10. Основание, характеризующее i – позицию – p_i
11. Набор оснований $p \in [p_0, p_1, ..., p_n]$

В произвольной системе счисления целое положительное число N изображается последовательностью символов

$$[N] = a_n^j a_{n-1}^j ... a_2^j a_1^j a_0^j,$$

где $[N]$ – представление числа в этой системе счисления.

Такая запись означает, что величина числа может быть определена по формуле:

$$[N] \equiv \sum_{i=0}^{n} a_i^j Q_i \bmod Q$$

Следовательно, в любой системе счисления величина числа зависит как от значений символов a_i^j, так и от количественных мер каждой позиции Q_i.

Порядок вычисления символов a_i^j определяется выбранным классом систем счисления. Символы могут вычисляться либо последовательно во времени, начиная со старшего a_n^j или с младшего символа a_0^j, либо одновременно(параллельно) и независимо. Следует заметить, что такие базовые параметры, как базис B, набор оснований $p \in [p_0, p_1,..., p_n]$ связана между собой с помощью определенных математических соотношений, вид которых зависит от класса системы счисления. В каждой системе счисления должны выполняться также определенные ограничения, накладываемые на выбор мер Q_i, оснований p_i, количества l_i и набора символов A_i в каждой позиции, обусловленные требованиями обеспечения однозначного и непрерывного представления величин из заданного диапазона Q. Под непрерывным представлением понимают возможность представления всех чисел диапазона Q с фиксированной дискретностью (так, на пример, для целых чисел эта дискретность равна 1).

В системах счисления, применяемых в ЭВМ алфавит А представляет собой конечный целочисленный набор.

Построение систем счисления класса А, которые принято называть позиционными ППС, начинают с выбора допустимого для каждой позиции количества символов l_i, формирования алфавита А и вычисления количественных мер Q_i, называемых в этом случае весами разрядов, т.е. нахождения базиса B. Таким образом, для позиционных систем счисления первичными параметрами являются базис B (набор всех мер Q_i), допустимое для каждой позиции количество символов l_i и алфавит А.

В системах счисления, в которых $Q_0 = I$ и $a_i^1 = 0$, для удовлетворения требований обеспечения непрерывности представление величин веса последующих разрядов должны выбираться, исходя из следующего условия

$$Q_i \le \sum_{s=0}^{i-1} Q_s (l_s - 1) + 1 \quad \forall \mathrm{i} = \overline{0, \mathrm{n}}.$$

Выбрав веса, рассчитывают основания, характеризующие каждую позицию по формуле:

$$p_i = \frac{Q_{i+1}}{Q_i}$$

Если все количественные меры, входящие в базис, равны между собой, т.е. $|Q_i| = Q_0$, получаем непозиционную систему счисления МПС, выступающая как частный случай позиционной системы. В этих системах счисления все основания $|p_i| = 1$. В качестве примера рассмотрим непозиционную систему счисления, называемую унарной или единичной, в которой для записи числа применяется всего один символ. В этой системе все

$Q_i = 1, p_i = 1, l_i = 1, j = 1, a_i = 1 \quad \mathrm{A} \in [1], \mathrm{Q} = \mathrm{n} + 1.$

К этому же классу относят и “римскую” систему счисления, в которой для обозначения чисел 1,5,10,50,100,500,1000 используются заглавные буквы I,V,X,..,C,D,M. В “римской” системе $Q_i = 1$ при $\mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{j} \ge \mathrm{a}_{\mathrm{i-1}}^\mathrm{j}$ и $Q_i = -1$ при $\mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{j} \lhd \mathrm{a}_{\mathrm{i-1}}^\mathrm{j}$ т.е. $p_i = \pm 1 \quad \mathrm{A_i} \in [I, V, X, L, C, D, M]$

Особенностью позиционных систем состоит в том, что в них базис обязательно включает не все равные между собой количественные меры (веса). Систему счисления, в которой вес каждого следующего разряда не меньше, чем веса всех предыдущих разрядов, будем называть упорядоченной. Очевидно, что в упорядоченных системах счисления обязательно все основания $p_i \ge 1$.

Позиционная система счисления, в которой основания всех разрядов оказались одинаковыми т.е. $p_i = p$ для всех $i = \overline{o, n}$ называется однородной.

В однородной системе счисления, имеющей $Q_o = I$, вес i – разряда вычисляется по формуле

$Q_i = p_i$.

В связи с тем, что в однородной системе используется только одно основание, удобно такую систему называть по значению её основания. Например, систему счисления с основанием $p = 2$ – двоичной, с основанием $p = 3$ – троичной и т.д. Если в позиционной системе счисления веса выбраны таким образом, что не все основания оказались одинаковым, получают систему счисления которую принято называть неоднородной. В неоднородной системе счисления вес *i*-разряда связан с основаниями всех предыдущих разрядов следующим соотношением:

$$Q_i = Q_0 \prod_{k=0}^{i-1} p_k$$

К неоднородным системам счисления, имеющим целочисленные основания, можно отнести систему измерения времени , систему счисления, в которой в качестве основания выбран набор взаимно простых чисел.

В позиционных системах как однородных, так и неоднородной, могут использоваться не только целые, но дробные и иррациональные основания. Так, например, известны примеры использования однородных систем счисления с дробными основаниями, равными $p = 1 + 2^{1-\gamma}$, где γ -может выбраться, равным 2,3 и т.д., иррациональным основанием $p = \sqrt[\gamma]{2}$ для γ =2,3,…; с основанием р, которое равно числу “золотой” S-пропорции, определяемой выражением

$p = \lim_{n \to \infty} \frac{\varphi_s(n)}{\varphi_s(n-1)}$,где $\varphi_s(n) - n$ -ое S-число Фибоначчи.

В так называемой факториальной системе счисления, в которой веса $Q_i = (i+1)!$, все основания представляют собой также целые числа, так как

$$p_i = \frac{(i+2)!}{(i+1)!} = (i+2) \text{ для всех } i = \overline{0,n}$$

Можно привести большое число примеров неоднороднных систем счисления с иррациональным основанием. Например, система счисления, в которой веса представляют собой ряд последовательных натуральных чисел, т.е. $Q_i = i + 1$, имеет основания, равные

$$p_i = \frac{i+2}{i+1}.$$

Система счисления, в которой вес младшего разряда $Q_i = 1, p_0 = 2$, а веса остальных разрядов представляемых собой четные числа, имеет основания $p_i = 1 + \frac{1}{i}$ для $i = \overline{1,n}$.

Система счисления, в которой веса Q_i равны числам Фибоначчи, т.е

$$Q_i = \varphi_s(i) = \begin{cases} 0, i < 0, \\ 1, i = 0, \\ \varphi_s(i-1) + \varphi_s(i-s-1), i > 0 \end{cases} \quad \text{где}$$

S=1,2,3,…

Тогда $p_i = \frac{\varphi_s(i+1)}{\varphi_s(i)}$

Если выбрано S=1, веса разрядов такой неоднородной системы оказываются равными 1,2,3,5,8,13, и т.д., если выбрано S=2, веса разрядов соответственно равны 1,1,2,3,4,6,9,13 и т.д.

Если базис позиционной системы счисления найден, можно определить в каком количестве присутствует каждая из выбранных мер Q_i , начиная с наибольшего из весов Q_{n+1}. В результате первого деления получаем частное Q_n^j и остаток r_n:

$$N = a_n^j Q_{n+1} + r_n \text{, где } 0 \le r_n \le Q_{n+1}.$$

Затем делим остаток r_n на следующий вес Q_n

$$r_n = a_{n+1}^j Q_n + r_{n-1} \text{, где } 0 \le r_{n-1} \le Q_n$$

или $N = a_n^j Q_{n+1} + a_{n-1}^j Q_n + r_{n-1}$

Далее остаток r_{n-1} делим на Q_{n-1} и т.д. Процесс деления продолжаем до тех пор, пока не будет найден последний остаток $r_o < Q_1$. В результате такого деления получили представление числа N в виде последовательности символов a_i^j , начиная со старшего символа a_n^j. Нетрудно убедиться в том, что выполняя последовательное деление исходного числа N получающихся в результате деления частных на основание p_i , начиная с основания p_0 , можно определить символы a_i^j , начиная с младшего символа a_0^j.

Заметим, что в каждом разряде количество целочисленных значений l_i зависит от основания данного разряда. Если все p_i - целые числа и количество символов $l_i = p_i$, такая система счисления является однозначной (не избыточной), а при $a_i^1 = 0$ ее называют натуральной.

Если $a_i^1 \neq 0$, при построении системы счисления необходимо оговаривать, какие конкретно символы выбраны для изображения чисел. Системы счисления могут иметь не только все положительные цифры, но и все отрицательные. Система счисления с нечетным натуральным основанием $p = 2l + 1$ и цифрами $a_i \in [-l, -l+1, ..., -1, 0, 1, .., l-1, l]$ называют симметричными. Такие системы счисления позволяют представить любое целое число как положительное, так и отрицательное. Примером симметричной системы счисления может служить троичная система с цифрами [-1,0,1]. Если p_i – целые, а количество символов l_i выбрано бóльшим, чем p_i т.е. $l_i > p_i$, система счисления будет неоднозначной. В таких системах счисления одна и та же величина может быть представлена различными последовательностями символов. Например двоичная система счисления с набором символов (-1,0,1). Для дробных и иррациональных значений p_i допустимое количество символов l_i выбирается с округлением в большую сторону, т.е $l_i \geq]p_i[$ и так как при этом всегда оказывается что $l_i > p_i$, такие системы счисления будут всегда неоднозначными.

Если для двух однородных чисел счисления с основанием p_1 и p_2 справедливо соотношение $p_1 = p_2^m$, будем называть такие счисления родственными. Так, например, родственными будут двоичная система с четверичной, восьмеричной, шестнадцатеричной, четверичная с шестнадцатеричной, а система счисления с основаниями 2 и $\sqrt{2}$,основаниями $i\sqrt{2}$ и -2, с основаниями 2i и 4, с основаниями -2 и -8 и т.п.

Для неоднородных систем счисления также существует понятие родственных систем при следующем условии, если

$$p_{i,1} = \prod_{j=S1}^{s2} p_{j,2} \text{ для } i = \overline{0,n}$$

$$S_1 = \begin{cases} 0, i = 0 \\ \sum_{j=0}^{i-1} (n_s + 1), i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$$S_2 = \sum_{j=0}^{i} (n_s + 1) = 1; j = \sum_{s=0}^{i-1} (n_s + 1) + k, i = \overline{1,n}, k = \overline{0,n}$$

Следует отметить, что $S_2 - S_1 + 1 = n_i + 1$, где $p_{i,1} - i$ – основание первой системы счисления $p_{j,1} - j$ – основание второй системы счисления.

Если в какой-то системе счисления ее символы представляются с помощью цифр другой системы счисления, то такую систему называют системой с кодированным представлением ее цифр. Десятичная система счисления, в которой каждая десятичная цифра представляется тетрадой из двоичных цифр называется двоично-кодированной. Например, так называемая двоично-десятичная система счисления 8421 представляет собой неоднородную систему счисления, у которой используются основания и веса:

$p_{0,2}$ =2; $p_{1,2}$ =2; $p_{2,2}$ =2; $p_{3,2}$ =1,25; $p_{4,2}$ =2; $p_{5,2}$ =2; $p_{6,2}$ =2; $p_{7,2}$ =1,25;

и т.д.

$Q_{0,2} = 1; Q_{1,2} = 2; Q_{2,2} = 4; Q_{3,2} = 8; Q_{4,2} = 10; Q_{5,2} = 20;$

и т.д.

Другая широко распространенная двоично-десятичная система счисления 2421 представляет собой неоднородную систему счисления с основаниями 2,2,0,5,5; 2,2,0,5,5; и.т.д. обе эти системы счисления являются родственными, так как, по принятому определению:

$$\prod_{j=0}^{3} p_{j,2} = p_1 = 10$$

Построение систем счисления класса B, куда входит система счисления остаточных классов СОК, начинают с выбора основания p_i, которые обязательно являяются целыми, причем, с целью обеспечения однозначности и непрерывности представления набор оснований должен включать p_i, представляющее собой взаимно простые числа.

Выбрав основания, можно рассчитывать величины Q_i:

$$Q_i = m_i \frac{p}{p_i} = m_i \hat{p_i} \text{ , где } m_i = 1,2..p_i \text{ где}$$

$$|Q_i|_{p_i} \equiv 1, |Q_i|_{p_j} \equiv 0, \forall i \neq j$$

Q_i -ортогональные базисы

т.е. определить ее базис B.

Произвольное число X определяется набором остатков ($x_0, x_1, ..., x_n$) где $X \equiv x_1 \bmod p_1$ или $X \equiv |x_1|_{p1}$, $X \equiv x_2 \bmod p_2$, $X \equiv x_n \bmod p_n$. Процесс вычисления символов осуществляется независимо и параллельно по каждому основанию p_i.

Таким образом, особенность систем счисления остаточных классов состоит в том, что в них первичными параметрами являются целые, взаимно простые основания. При этом Китайская теорема об остатках гарантирует однозначное представление чисел X в диапазоне[0..P-1], где

$$P = \prod_{i=0}^{n} p_i \ .$$

Формула перевода из СОК в десятичную систему счисления имеет вид

$$X \equiv | x_1 Q_1 + x_2 Q_2 + ... + x_n Q_n |_P \ .$$

В литературе утверждается, что СОК является непозиционной символической невзвещенной системой счисления [Л.3]. Пример перевода чисел из СОК в десятичную систему счисления с помощью ортогональных базисов, полностью отрицает это утверждение. Эта система система счисления является представителем совсем другого класса B систем счисления, в которых, еще раз подчеркнем, процесс нахождения символов, в отличии от систем класса A, осуществляется паралельно и независимо.

Двоично-десятичная система счисления получившая название 8421+3, представляет собой смещенную на 3 единицы классическую двоично-десятичную систему 8421. Недопустимо относить ее к “незвешенным” системам счисления, в которых веса отдельных разрядов имееют переменные значения.

Если позиционная система счисления имеет p>>2 (например $p = 2^{16}$) то любой ее символ можно представить с помощью СОК (на пример для $p = 2^{16}$ можно выбрать модули $p_1 = 13, p_2 = 16, p_3 = 17, p_4 = 19$ тогда P=67184> 2^{16})для кодировки этих модулей достаточно иметь 18 двоичных разрядов, что не намного больше 16. Целесообразность такого комбинированного представления объясняется возможностью реализации сумматора, в котором перенос будет распространяться не более чем на 5 разрядов. В результате приведенных выше рассуждений, приведем следующую классификацию систем счисления (Рис. 1).

Выводы

1. Предложено системы счисления разделить на два класса. Класс систем счисления определяется порядком вычисления символов. В системах счисления класса A, к которым относятся позиционные системы, порядок вычисления символов зависим и последовательный. В системах класса B, к которым относятся системы счисления остаточных классов, порядок вычисления символов параллелен и независим.
2. Показано, что к системам класса A относятся непозиционные системы счисления, представляющие собой частный случай позиционных систем счисления.
3. Четко сформулировано понятие неоднозначности систем счисления. Показано, что системы счисления с дробными и иррациональными основаниями всегда неоднозначны.
4. Введено понятие родственных систем счисления, показано, что перевод из одной родственной системы счисления в другую осуществляется перекодировкой символов.

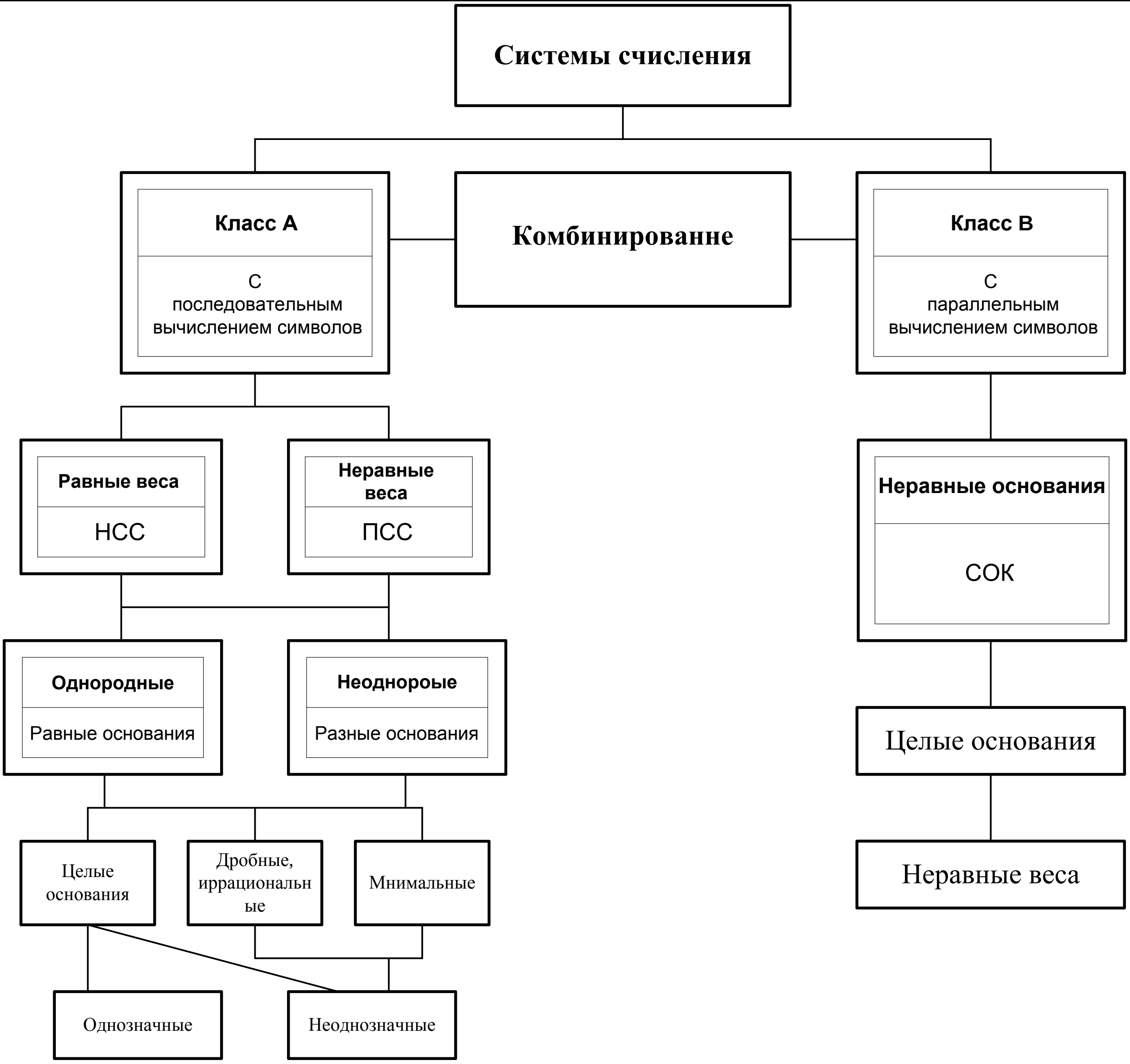

Рис.1.

Список литературы

1. Касаткин В.Н. Новое о системах счисления. – К: Вища школа. С. 82-96.
2. Фомин С.В. Система счисления. – М: Наука. – 1987. – С. 48.
3. Энциклопедия кибернетики. К. Главная редакция УСЭ. – 1974. – 680 с.
4. Лысиков Б.Т. Арифметические и логические основы цифровых автоматов. Минск: В.Ш. – 1980. – 336 с.
5. Стахов А.Н. Введение в алгоритмическую теорию измерений. – М: Сов. радио. –1977. – 287 с.
6. Стахов А.П. Коды золотой пропорции. М: – 1984. – 168 с.
7. Поспелов Д.А. Арифметические основы вычислительной машины дискретного действия. Высшая школа. М: – 1970. – 308 с.
8. Шауман А.М. Основы машинной арифметики. Л: Изд. Ленинград. Университет, – 1978. – 260 с.
9. Корнейчук В.И., Тарасенко В.П. Основы компьютерной арифметики. К. – 2002. – 176с.
10. Е.Н.Баня, В.И.Селиванов. Кодирование знакопеременой информации в цифровых устройствах. Кибернетика №3/ – 1987. С. 81-86.